

كشاف المتباينات المشهورة

(١) قانون آبل للتجميع

[Abel's Summation Formula]

إذا كانت $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ أعداداً حقيقية وكان

$$S_i = a_1 + a_2 + \dots + a_i \text{ حيث } i = 1, 2, \dots, n$$

فإن

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i = \sum_{i=1}^{n-1} S_i (b_i - b_{i+1}) + S_n b_n$$

(٢) متباينة الوسط الحسابي والوسط الهندسي

[AM-GM (Arithmetic Mean-Geometric Mean)]

إذا كانت a_1, a_2, \dots, a_n أعداداً حقيقية غير سالبة فإن

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \geq (a_1 a_2 \dots a_n)^{\frac{1}{n}}$$

ونتم المساواة إذا وفقط إذا كان $a_1 = a_2 = \dots = a_n$. هذه المتباينة حالة خاصة مما يعرف
باسم متباينة وسط القوة (Power Mean Inequality).

(٣) متباينة الوسط الحسابي والوسط التوافقي

[AM-HM (Arithmetic Mean-Harmonic Mean)]

إذا كانت a_1, a_2, \dots, a_n أعداداً موجبة فإن

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \geq \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}}$$

وتتم المساواة إذا وفقط إذا كان $a_1 = a_2 = \dots = a_n$. هذه المتباينة حالة خاصة من متباينة وسط القوة.

(٤) متباينة برنولي

[Bernoulli's Inequality]

لكل عدد حقيقي $x > -1$ ولكل $a > 1$ لدينا

$$(1+x)^a \geq 1+ax$$

(٥) متباينة كوشي شوارتز

[Cauchy-Schwartz's Inequality]

لأي أعداد حقيقية a_1, a_2, \dots, a_n و b_1, b_2, \dots, b_n لدينا

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2$$

وتتم المساواة إذا وفقط إذا كانت نسبة a_i إلى b_i ثابتة لكل $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

(٦) متباينة كوشي شوارتز للتكاملات

[Cauchy-Schwartz's Inequality for Integrals]

إذا كان a, b عددين حقيقيين بحيث $a > b$ وكانت $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ دالتين قابلتين للتكامل، فإن

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx \right) \cdot \left(\int_a^b g^2(x)dx \right)$$

(٧) متباينة تشيبشيف

[Chebyshev's Inequality]

افرض أن $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ وأن b_1, b_2, \dots, b_n أعداداً حقيقية. عندئذ(I) إذا كان $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$ فإن

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \geq \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_i \right)$$

(II) إذا كان $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$ فإن

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_i \right)$$

(٨) متباينة تشيبشيف للتكاملات

[Chebyshev's Inequality for Integrals]

إذا كان $a < b$ عددين حقيقيين وكانت $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ دالتين قابلتين للتكامل ومتزايدتين معاً أو متناقصتين معاً فإن

$$(b - a) \int_a^b f(x)g(x)dx \geq \int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b g(x)dx$$

وإذا كانت أحد الدالتين متزايدة والأخرى متناقصة فإن المتباينة العكسية صحيحة.

(٩) الدالة المحدبة

[Convex Function]

تسمى الدالة الحقيقية f على فترة $I \subseteq \mathbb{R}$ محدبة إذا لكل $x, y \in I$ ولكل $\alpha, \beta \geq 0$ تحقق $\alpha + \beta = 1$ نجد

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y)$$

(١٠) التحدب

[Convexity]

تسمى الدالة f مقعرة لأعلى "لأسفل" على $[a, b]$ إذا كان بيانها يقع تحت "فوق" المستقيم الواصل بين $(a_1, f(a_1))$ و $(b_1, f(b_1))$ لكل $a \leq a_1 < x < b_1 \leq b$. وتسمى الدالة g مقعرة لأعلى "لأسفل" على المستوى الإقليدي إذا كانت محدبة لأعلى "لأسفل" على كل مستقيم في المستوى حيث ننظر للمستقيم بإعتباره \mathbb{R} . كذلك تسمى الدالة محدبة إذا كانت مقعرة لأعلى ومقعرة فحسب إذا كانت مقعرة لأسفل. إذا كانت f مقعرة لأعلى على $[a, b]$ وكانت $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ أعداداً غير سالبة مجموعها يساوي 1 فإن

$$\begin{aligned} & \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_n f(x_n) \\ & \geq f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n) \end{aligned}$$

لكل x_1, x_2, \dots, x_n في الفترة $[a, b]$. أما إذا كانت الدالة مقعرة لأسفل فتصح المتباينة العكسية. تسمى هذه المتباينة متباينة جنسن (Jensen).

(١١) المجموع الدوري

[Cyclic Sum]

ليكن n عدداً صحيحاً موجباً. إذا كانت f دالة في n من المتغيرات، نعرف المجموع الدوري للمتغيرات (x_1, x_2, \dots, x_n) بالتالي

$$\sum_{cyc} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + f(x_2, x_3, \dots, x_n, x_1) + \dots + f(x_n, x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$$

(١٢) متباينة هولدر

[Holder's Inequality]

ليكن r, s عددين موجبين بحيث $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$. عندئذ، لكل من الأعداد الموجبة a_1, a_2, \dots, a_n و b_1, b_2, \dots, b_n ، نجد أن

$$\frac{\sum_{i=1}^n a_i b_i}{n} \leq \left(\frac{\sum_{i=1}^n a_i^r}{n} \right)^{\frac{1}{r}} \cdot \left(\frac{\sum_{i=1}^n b_i^s}{n} \right)^{\frac{1}{s}}$$

(١٣) متباينة هايجين

[Huygens's Inequality]

إذا كانت $p_1, p_2, \dots, p_n, a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ أعداداً موجبة وكان $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$ فإن

$$\prod_{i=1}^n (a_i + b_i)^{p_i} \geq \prod_{i=1}^n a_i^{p_i} + \prod_{i=1}^n b_i^{p_i}$$

(١٤) متباينة ماكلوران

[Maclaurin's Inequality]

إذا كانت x_1, x_2, \dots, x_n أعداداً موجبة، فإن

$$S_1 \geq S_2 \geq \dots \geq S_n$$

حيث

$$S_k = \sqrt[k]{\frac{\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq n} x_{i_1} \cdot x_{i_2} \cdot \dots \cdot x_{i_k}}{\binom{n}{k}}}$$

(١٥) متباينة مينكوفسكي

[Minkowski's Inequality]

إذا كان $r \geq 1$ عدداً حقيقياً وكانت $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ أعداداً حقيقية موجبة فإن

$$\left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^r \right)^{\frac{1}{r}} \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^r \right)^{\frac{1}{r}} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^r \right)^{\frac{1}{r}}$$

(١٦) متباينة وسط القوة

[Power Mean Inequality]

لتكن a_1, a_2, \dots, a_n أعداداً حقيقية موجبة مجموعها يساوي 1. لأي أعداد حقيقية موجبة

ضع $M_r = (a_1 x_1^r + a_2 x_2^r + \dots + a_n x_n^r)$ حيث r عدد حقيقي موجب. ضع

$$M_\infty = \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \text{ و } M_0 = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}$$

$$M_{-\infty} = \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \text{ عندئذ نجد أن } M_{-\infty} \leq M_s \leq M_t \leq M_\infty$$

لكل

عددين حقيقيين $s \leq t$.

(١٧) متباينة جذر الوسط

[Root Mean Inequality]

إذا كانت a_1, a_2, \dots, a_n أعداداً حقيقية غير سالبة فإن

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

وتتم المساواة إذا وفقط إذا كان $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

(١٨) متباينة شور

[Schur's Inequality]

إذا كانت x, y, z أعداداً حقيقية موجبة وكانت $r > 0$ فإن

$$x^r(x-y)(x-z) + y^r(y-z)(y-x) + z^r(z-x)(z-y) \geq 0$$

في الحالة أكثر شيوعاً حيث $r = 1$ تأخذ المتباينة الأشكال المكافئة التالية

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3xyz \geq xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x) \quad (1)$$

$$xyz \geq (x+y-z)(y+z-x)(z+x-y) \quad (2)$$

$$xy + yz + zx \leq \frac{1+9xyz}{4} \quad \text{فإن } x + y + z = 1 \quad (3)$$

(١٩) متباينة سوراني

[Suranyi's Inequality]

إذا كانت a_1, a_2, \dots, a_n أعداداً حقيقية غير سالبة فإن

$$(n-1) \sum_{k=1}^n a_k^n + n \prod_{k=1}^n a_k \geq \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^n a_k^{n-1} \right)$$

(٢٠) متباينة تيركفيتشي

[Turkevici's Inequality]

لتكن x, y, z, t أعداداً حقيقية موجبة. عندئذ

$$x^4 + y^4 + z^4 + t^4 + 2xyzt \geq x^2y^2 + y^2z^2 + z^2t^2 + t^2x^2 + x^2z^2 + y^2t^2$$

(٢١) متباينة الوسط الحسابي والوسط الهندسي مع الأوزان

[Weighted AM-GM Inequality]

افرض أن a_1, a_2, \dots, a_n أعداداً حقيقية غير سالبة. إذا كانت w_1, w_2, \dots, w_n أعداد

حقيقية غير سالبة مجموعها يساوي 1، فإن

$$w_1 a_1 + w_2 a_2 + \dots + w_n a_n \geq a_1^{w_1} a_2^{w_2} \dots a_n^{w_n}$$

وتتم المساواة إذا وفقط إذا كان $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.